

課 題	<b>積分制約条件をもつ微分方程式の 解の表示公式と大域的分岐構造</b>
研究組織	四ツ谷晶二（理工学部・教授）研究代表者 松本和一郎（理工学部・教授） 若狭 徹（早稲田大学理工学部・助教） 村井 実（龍谷大学・非常勤講師）

## 1. 研究発表

- (1) W. Matsumoto, M. Murai and S.Yotsutani: One can hear the shape of some non-convex drums, More Progress in Analysis, Proc. 5th ISAAC Congress, 2009, World Sci. Pub., 863-872.
- (2) T. Wakasa and S. Yotsutani: Asymptotic profiles of eigenfunctions for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems, Commun. Pure Appl. Anal. 9 (2010), 539-561.
- (3) T. Wakasa: Representation and asymptotic formulas for 1-dimensional linearized eigenvalue problems with Dirichlet boundary condition, Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications, Special Issues WCNA2008, 71 (2009), e2696-e2704.
- (4) S. Yotsutani: Asymptotic profiles of eigenfunctions for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems, The Second International Conference on Reaction-Diffusion Systems and Viscosity Solutions, Providence University, Taiwan, July 15, 2009.
- (5) M. Murai: On the equilibrium states of elastic rings, Conference "Variational problems for curves and surfaces and related topics", Nara Women's University, July 1, 2009.
- (6) S. Yotsutani: Plane elastic closed curves with area constraints and related topics, The Second International Conference on Reaction-Diffusion Systems and Viscosity Solutions, Providence University, Taiwan, July 18, 2009.
- (7) T. Wakasa: On the limiting structure of linearized eigenvalue problems associated with 1-dimensional bistable reaction-diffusion equations, JSPS-DFG Conference in Evolution Equations, Related Topics and Applications, Helmholtz Zentrum, Munich, Germany, Sept. 11, 2009.
- (8) 四ツ谷晶二：面積を規定した2次元弾性曲線の全体像，第2回RDSセミナー，明治大学生田キャンパス，2009年5月19日。
- (9) 四ツ谷晶二：面積制約条件付の閉平面弾性曲線と関連する話題，RIMS研究集会「保存則と幾何学的偏微分方程式とその応用」，京大会館，2009年6月10日。
- (10) 四ツ谷晶二：数式処理の微分方程式研究への応用，RIMS研究集会「数式処理と教育」，京大会館，2009年8月26日。
- (11) 四ツ谷晶二：Cahn-Hilliard方程式の定常解の大域的分岐構造と関連する話題，研究集会「夏の偏微分方程式セミナー2009」，龍谷大学ともいき荘，2009年8月28日。
- (12) 四ツ谷晶二：Cahn-Hilliard方程式の定常解の大域的分岐構造と関連する話題，研究集会「偏微分方程式と現象：PDEs and Phenomena in Miyazaki 2009」，宮崎大学工学部，2009年11月21日。
- (13) 村井・松本・四ツ谷：完全楕円積分の商の評価式について，研究集会「松山キャンプ」，愛媛県総合社会福祉会館，2010年1月7日。
- (14) 四ツ谷晶二：定常解の大域的分岐構造解析と完全楕円積分の高精度近似，研究集会「HMA セミナー・冬の研究会2010」，広島大学総合科学部，2010年1月8日。
- (15) 若狭徹：あるスカラー反応拡散方程式の線形化固有値問題の極限構造について，研究集会「非線型現象の数値シミュレーションと解析2010」，北海道大学理学部，2010年3月5日。
- (16) 村井・松本・四ツ谷：完全楕円積分の商の評価式とその応用，日本数学会・2010年度年会，慶応大学理工学部，2010年3月24日。

## 2. 2009年度の研究計画

積分制約条件をもつ微分方程式に対しては、通常、解の存在のための十分条件を求めるとか、局所的な解の分岐構造に対する研究がなされてきた。数年前より、我々は解の表示公式と大域的な分岐構造についての研究を開始し、科学研究費補助金の援助を受け成果を挙げてきた。この研究をさらに発展させ、同時に工学の諸問題に応用することを目指す。

従来、解析が不可能と思われていた大域的な分岐問題を完全楕円積分  $K(k)$ ,  $E(k)$ ,  $\Pi(*, k)$  からなる超越方程式に帰着し、この超越方程式のすべての解を完全に解明したのである。このよう手法を深化・発展・応用させるために次に述べる2つのことに焦点を絞って研究を行う。

第1は「Kac のスペクトル逆問題に密接に関連して現れる平面弾性曲線の問題」である。問題は、「曲線の長さとして囲まれる面積を与え、弾性エネルギーが最小となる弾性曲線を決定せよ」というものである。この問題は、渡辺により、研究が始められ、部分的な結果が得られていたが、完全解明ははるかかなたという印象であった。しかしながら、本課題の分担者の松本、村井との共同研究により完全解明できるということがわかった。この研究には、この研究に先立つ、G-L 方程式の研究の際に発見した手法を応用・発展させた。個々の曲線は多様な形をしているので詳細に調べ、さらに、工学の問題へ応用することを目的としこれらを遂行していく。

第2は線形化固有値問題の固有値・固有関数に関する問題である。最近、分担者の若狭との共同研究で、反応拡散方程式の線形化固有値問題の固有値・固有関数の表示公式を発見した。これにより固有関数の具体的な計算法が可能になり、解の形状の数学的解析も可能となった。これは、量子力学のプロットホの定理(周期ポテンシャルに対する固有関数の特徴づけを抽象的に述べたもの)の新たな具体例を示したことにもなっている。したがって、1次元フォトリック結晶等の固有関数の具体的な計算や、数学的解析にも応用が期待される。具体例を増やし固有関数の特徴を解明し、工学への応用をめざすことを目的としこれを遂行していく。

また、他大学との研究者との共同研究を活性化するため、優秀な研究者を龍谷大学に招いての研究集会や講演会を開催し、討論・情報交換を行う。

## 3. 研究実績の概要(研究経過と成果)

研究発表(1)の論文においては「曲線の長さとして囲まれる面積を与え、弾性エネルギーが最小となる弾性曲線を決定せよ」という問題に対する概要を発表した。詳細結果を発表するため、もう一度計算をやりなおし証明を簡略化しているところである。新たに見通しのよい表示式が見つかり、それに基づいて論文全体を見直しているため、予定より完成が遅れているが、2010年度中に完成の見込みである。

線形化固有値問題に関して説明する。古典的な Sturm-Liouville 理論により、一般的に固有値・固有関数の存在は保証されている。しかし、固有値を決定する固有方程式相当の表示式があるか、固有関数の具体的な表示式があるか、という問題は容易な問題ではない。

既発表論文において、境界条件が Neumann で、非線形項が  $f(u)=\sin u$  の場合に、固有方程式相当の表示式が完全楕円積分からなる超越方程式であること、固有関数のヤコビの楕円関数を用いた表示式があることを示し、すべての固有値に対する精密な漸近表示を得ていた。

研究発表(2)の論文においては、既発表論文の結果を土台とし、 $f(u)=\sin u$  の場合、拡散係数を零に近づけたときの固有関数の形状について調べた。この結果、思いもかけない美しい規則性をもった極限形状であることを、数学的な定理として定式化し厳密な証明を与えた。

定理の証明には新しい2つのアイデアが重要な働きをする。1つめは完全楕円積分からなる超越方程式の解析である。最も難しいのは完全楕円積分の多項式の取り扱いであるが、母数が1に近づく場合の本質を取り出すいくつかの新しい近似公式を見出した。2つ目は、固有関数のもつ隠れた対称性を明らかにし、それを利用して極限形状の局所的な収束から大域的な収束を引き出したことである。

この論文で発見された完全楕円積分に関する近似公式・かくれた対称性は、将来、全く無関係ないろんな問題においても大変有用なものとなることが期待される。

最も典型的で工学への応用においても重要である、Allen-Cahn 型非線形項  $f(u)=u-u^3$  の反応拡散方程式の線形化固有値問題について、これまで考察してきた  $f(u)=\sin u$  の場合と比較しながら計算を行った。予想に反し、より複雑ながら美しい規則性をもった極限形状であることを数値実験でみつけ、それを証明するためのいくつかの新しい数学的なアイデアを発見した。現在論文執筆を進めている。

研究発表(3)では、非線形項は  $f(u)=\sin u$  とした場合に前論文の方法が、境界条件によらず利用可能であり、これを用いて全ての固有関数の漸近形状が得られることが示されている。Neumann 境界条件の場合との本質的な差異は、固有関数の局所形状を支配する関数が異なる点であり、漸近公式に付随する対称性についてはある程度共通していることがわかった。

研究発表(4)～(7)は、国際会議での発表である。(4)、(7)において、上記に述べた、線形化固有値問題に関する我々の最新の結果を報告した。また、(5)、(6)においては、上記に述べた、弾性曲線に関する我々の最新の結果を報告した。特に、(5)は工学的な観点からも興味のある、赤血球の形状に関する数理モデルの研究である。従来、部分的な結果はあったものの不完全であったが、われわれは弾性曲線の研究で見つけた微分方程式のすべての解の表示式を応用して完全解明を行った。

研究発表(8)～(16)は、国内における最新結果の報告である。特に、(14)、(16)は、大域的分岐問題を完全楕円積分  $K(k)$ ,  $E(k)$ ,  $\Pi(*, k)$  からなる超越方程式に帰着した後、この超越方程式のすべての解を完全解明するための、一般的で極めて強力な新しい方法の報告である。従来は問題ごとに幸運に頼ったような方法を使っており、推論も見通しの悪い複雑なものであったが、新しい方法により見通しよく一般的に超越方程式を解析できるようになった。

また、他大学との研究者との共同研究を活性化するため、優秀な研究者を龍谷大学に招いての研究集会や講演会を開催し、討論・情報交換を行った。ここでは、2009年8月に開催した研究集会のプログラムを紹介する。

### 夏の偏微分方程式セミナー2009

日 時：2009年8月27日(木)～8月29日(土)

場 所：龍谷大学セミナーハウス「ともいき荘」

世話人：四ツ谷晶二(龍谷大学) 壁谷 喜継(大阪府立大学)

8月27日(木)

15：15～16：05 仙葉 隆(九州工業大・工)

調和写像の熱流に関連する非線形熱方程式の爆発解について

16：15～17：05 中桐 信一(神戸大・工)

Boundary Reachability of a Parallel-Flow Three-Fluid Diffusive Heat Exchange Process(平行3層流拡散型熱交換プロセスの境界可到達性)

17：10～18：00 佐野 英樹(鹿児島大・学術情報基盤センター)

Stabilization of a Parallel-Flow Three-Fluid Diffusive Heat Exchange Process with Boundary Input(境界入力をもつ平行3層流拡散型熱交換プロセスの安定化)

8月28日(金)

9：00～9：50 和田 健志(熊本大・工)

空間2次元における Maxwell-Schrodinger 方程式

10：00～10：50 石井 克幸(神戸大・海事科学)

アメリカンオプションの近似問題について

11：10～12：00 星野 弘喜(藤田保健衛生大・医療科学部)

Traveling wave analysis for a mathematical model of malignant tumor invasion

13：45～14：35 白川 健(神戸大・工)

クリスタライントタイプ界面エネルギーに基づく Allen-Cahn 方程式および全変動流による極限方程式の安定定常解の連続依存性

14：45～15：35 若狭 徹(早稲田大・理工学術院)

特異摂動型スカラー反応拡散方程式の線形化固有値問題

16：00～16：50 四ツ谷晶二(龍谷大・理工)

Cahn-Hilliard 方程式の定常解の大域的分岐構造と関連する話題

17：00～17：50 田辺 広城(大阪大学名誉教授)

膜の振動方程式に関する黄・中桐の結果の別証明と改良

8月29日(土)

9：00～9：50 壁谷 喜継(大阪府立大・工)

ポテンシャルをもつ熱方程式の Hot Spot の挙動

10：00～10：50 菊地 光嗣(静岡大・工)

有界変動関数列の収束について

11：00～11：20 中桐 信一(神戸大・工)

膜の振動方程式に関する田邊先生の結果の一般化について