2017 年度科学技術共同研究センター　研究プロジェクト実績報告書

課　　題	局在パターン生成・伝播と交差拡散・非局所効果の数理的研究
研究組織	四ツ谷　晶　二　（理工学部・教授）研究代表者 森　田　善　久　（理工学部・教授） 川　上　竜　樹　（理工学部・准教授） 岩　見　真　吾　（九州大学・理学研究院・准教授） Wei-Ming Ni　　（ミネソタ大学・教授） Yuan Lou　　　（オハイオ州立大学・教授）
研究期間	２年研究の１年目

1. 2017 年度の研究計画

本プロジェクトは２年計画の１年目である.

生物拡散・伝染病の流行，形態形成での細胞極性の発現を典型例とする，時間的空間的な局在パターンの生成や伝播，および，それに対する交差拡散や非局所効果の大域的分岐構造や解形状に及ぼす影響の本格的な数学的解明は始まったところである．これらの解明のためには，従来の局所分岐理論や関数解析的方法だけでは不十分であり共通の困難さを含む．それを乗り越えるためには，新たな方法論と，高い立場から見直した融合的な研究の両方が必要となる.

ここ数年で研究代表者が独自に発展させてきた楕円関数を用いた解表示とその大域的分岐構造の解明手法を軸に，分担者のもつさまざまな手法を融合・発展させ，さまざまな分野に現れる局在パターン生成・伝播と交差拡散・非局所効果の影響の数学的解明を目的とする．同時に，研究を将来的にさらに発展させていくため人的ネットワークを強化することも目的としている.

交差拡散とは，競合する相手の密度勾配を感知して，その密度の低い方へ積極的に移動，即ち， 相手種の多い領域を避けるという非線形拡散であり，すみわけ現象の数理モデルにあらわれる．非局所効果とは，例えば保存則をもつ反応拡散系を単独方程式に帰着すると現れ，微分方程式の中に，求めるべき解の積分量を含むものである．これらの数学的解析は極めて困難なものとなる.

本プロジェクトメンバーの，四ツ谷・森田・川上・Ni・Lou は「非線形偏微分方程式」および「解の具体形を求める手法」を巧みに組み合わせて研究し，岩見は「実験・理論の融合の分野」で着実に学術的成果を挙げ，高い評価を得て，全員が科研費をはじめとする外部資金を獲得してきている．特に，分担者の Ni 教授，Lou 教授は「非線形偏微分方程式」の分野の世界的リーダー達で両教授とも，半年程度を上海の華東師範大学に設置の Center for PDE で研究に専念している.

研究において重要なのはプロジェクトの組織内だけでなく，他分野や外部の研究組織との交流である．外部の研究機関で活躍している第一線の研究者を招聘し，定期的にセミナーを開催する．セミナーでは，研究成果の講演だけでなく，未解決の問題や今後の研究動向についても議論しながら意見交換する.

本プロジェクトは、細胞の極性の発現の数理モデルの研究，生物拡散のような数理モデルの研究，ここ数年で我々独自に発展させてきた楕円関数を用いた解表示式の発見とその大域的分岐構造の解明への応用で蓄積された数学的解析手法を生かして，様々な分野で見られる局在パターン生成・伝播と交差拡散・非局所効果の数理的研究自発的流れと集中化の数理的原理を研究しようという取り組みである.

具体的には，以下のような問題に取り組む.

１）生物集団の棲み分け現象を説明する SKT cross-diffusion 方程式に対する定常極限方程式の単調な解の一意性や多重度を数学的に証明する．さらに，安定性を数値的に調べる．
２）細胞の極性の発現を解明するための数理モデルに対して,最近解明に成功した拡散係数が無限大とした定常極限方程式の大域的解構造の結果をもとに，本来の問題である拡散係数が有限のときの大域的解構造を明らかにする．
３）ＨＩＶ などのウィルスの感染メカニズムの解明のため，岩見が中心になり数理モデルを作成し，実データとの比較検討や数学的解析を行ない,よりよい数理モデルへと改良を繰り返していく．

2．研究実績の概要（研究経過と成果）

上に述べた計画 １), 2), 3)に従い，研究経過と成果について説明していく．

１）の SKT cross-diffusion 方程式の交差拡散の効果を調べるため，交差拡散の効果を∞とした,定常極限方程式の単調な解の一意性･多重度の研究の進捗状況について述べる．競合する相手の妨害の度合いを表すパラメータを$C>0$とするとき，$C=7/3$で劇的に状況が変化し，$1\le C\le 7/3$のとき一意性が成立し，$C>7/3$のとき一意性が成立せず拡散係数の値によっては少なくとも２個の解が存在することをかなり以前に数値計算で見つけていた．十数年間これらのことを数学的に証明することに取り組んできて，数年前にうまくいく感触はつかんできたが，証明の完成には至っていなかった．

今回，院生達の協力を得て，集中的に研究をすすめた結果，$1\le C\le 7/3$のとき一意性の数学的な証明に成功した．これは研究発表(5)にあるように講演発表を行なった．また，$C>7/3$の場合についても，拡散係数が極めて小さいところまで慎重かつ詳細に数値計算を結果，複数個解が存在する場合において，解が２個の存在する場合と３個の解が存在する場合があり高々３個であるということを数値計算により数値発見した．これについては研究発表(5)にあるように講演発表を行なった．これらの結果を論文としてまとめているところである．なお，$0<C<1$の場合および安定性についても，研究発表(6)において中間報告を行なっている．また，研究発表(4)は間接的ながら関連する論文である．

２）の細胞の極性の発現を解明するための数理モデルに対して，拡散係数が無限大とした極限方程式の大域的解構造の概略はすでに論文として発表している．しかし，２次分岐点の存在や分岐曲線の単調性・非単調性については数値計算よりどうなっているかは数値的に確認している．このことについて研究発表(8)にあるように講演発表を行なった．２次分岐点の存在についての数学的証明はみつけたので論文を書いているところである．分岐曲線の単調性の問題は状況が複雑で数学的な証明は容易ではないという感触をもっている．

この問題を解くために，細胞極性モデルと密接に関連する，非局所項を含む空間１次元有限区間でのノイマン境界条件下でのアレン･カーン方程式の定常解を詳しく調べている．研究発表(1), (2)にあるように，２次分岐を含む大域的解構造については論文として発表している．このモデルでは分岐曲線は，数値計算により分岐曲線は単調であることが数値的にわかっている．このことを，研究発表(7) にあるように，講演発表を行なった．

本来の細胞極性モデルで拡散係数が有限のときの大域的解構造を明らかにすることの研究の進捗状況について述べる．拡散係数が$1/\pi^2$より大きいときについては，拡散係数が∞のときの解の表示式を巧妙に利用することにより，本来の数理モデルに対しても表示式を得ることができ大域的構造を解明できることがわかった．研究発表(8)でこれについても講演発表を行なった．

３）のＨＩＶ などのウィルスの感染メカニズムの解明のための研究の進捗状況について述べる．岩見は，間接的な実験データを詳細に分析し，細胞外に放出されるウィルス個体数の分布がガンマ分布に従うことをつきとめ，これを記述する新しい数理モデルの構築を行った．ウィルス感染において感染細胞内における感染過程は，実験では直接観測できず，細胞内で何が起こっているか不明で暗黒期と呼ばれているので，これの解明が最終目

標である．研究発表(24)～(31)にあるように，岩見が中心になり，直接的に関連するものと間接的に関連するもの両方について数理モデルを作成し，実データとの比較検討や数学的解を行ない,よりよい数理モデルへと改良を繰り返している．

上記１）～３）に対する研究成果に加え研究課題に関連する研究成果について説明する．

森田は，研究発表(9)～(15)にあるように，保存則が重要な役割をはたしている細胞極性の発生のメカニズムを数理的に説明するさまざまな微分方程式を用いた数理モデルについて，局在パターンの存在や安定について数学的に解析し論文として発表し，講演発表を行なった

川上は，研究発表(16)～(23)にあるように，個々のモデルで解析の背後に潜む統一的な数学的な原理を分類し見抜いてそれを論文として発表し，講演発表を行なった．

Ni は，研究発表(32)～(33)にあるように，数理生態学とそれに密接に関連した数学的研究で，空間非一様性がもたらす，従来の常識を覆す深い結果を論文として発表している．

Lou は，研究発表(34)～(37)にあるように，広範な数理生態学とそれに密接に数学的研究で,数学的な深い研究によりはじめて判明する驚くべき結果を論文として発表している．

さらに，京都駅前セミナー，大阪駅前セミナー，龍谷大学武蔵野大学研究交流会，共同研究者龍谷大学への招聘といった形で，外部の研究機関で活躍している第一線の研究者との交流を通じて，研究成果の講演だけでなく，未解決の問題や今後の研究動向についても議論しながら，新しい人脈のネットワークの構築し，我々の研究に役立てていった．

以下に，上記 2）の細胞極性モデルの解の大域的な分岐研究構造の本質を理解するために極めて有効な働きをする, 研究発表(2), (3), (7)の内容についてまとめて簡潔に説明する．

この論文ではノイマン境界条件の下での非局所項をもつ１次元アレン－・カーン方程式

$$\begin{cases} -du_{xx} = (1-u^2)\left(u - \dfrac{\mu}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} u\,dx\right), & x \in I, \\ u_x(-1) = 0,\ u_x(1) = 0, & \\ u_x(x) \geq 0 & x \in I \end{cases} \tag{1.1}$$

について考察している．ここで，d は正数のパラメータであり，μ は非負のパラメータで，$I := (0,1)$ である．

方程式 (1.1) は，定数解 $u \equiv -1, 0, 1$ をもつ．$u \equiv -1, 1$ は安定で $u \equiv 0$ は不安定である．ここでは非減少な解に焦点を絞って解を調べる．なぜならば，任意の解は，非減少な解のスケール変換と折り返しを組み合わせて得られるからである．また，$u(x)$ が解ならば $-u(-x)$ も解である．

$\mu = 0$ のとき，すなわち，非局所項（解の定積分項）がないとき，方程式(1.1)は１次元アレンー・カーン方程式とよばれているもので，すべての解は定数解 $u \equiv -1, 0, 1$ と原点に関して点対称な非定数解で尽くされ，この非定数解は，定数解 $u \equiv 0$ から一次分岐したものであり不安定である．これらは既によく知られていることである．

$\mu \neq 0$ のとき，すなわち，非局所項をもつときのアレンー・カーン方程式は，反応拡散方程式の分野のさまざまな場面にあらわれてきた．しかしながらこの問題はパラメータ μ，および，解から決まる定積分が非線形項の中にあらわれるため，通常よく使われる特異摂動法や関数解析的な手法だけでは，解が定数解に極めて近いとか，特別の形の特異解に近いといった特殊な状況下で僅かに断片的な情報を知ることができるがせいぜいで，解の大域的構造を知ることは極めて困難であるというのが従来の認識であった．

我々がまず興味をもったのは，$\mu > 0$ で μ を小さな値で任意に固定したとき，上記の１次分岐解から，２次分岐が起こっているのかどうか, 起こっているとすれば, 拡散係数 d を小さくしていったとき，それはどのような解に近づいていくのといった，μ ごとの解の大域的構造である．

さらに興味をもったのは，μを大きな値まで含めて，$\mu=0$からμを正の方向に動かしいったとき，(1.1)の解の大域的解構造は，μに応じてどのように変化するかということである．例えば，２次分岐を起こすμの値はどのように変化していくのか，適当なμの値で２次分岐を起こさなくなったりするのか．解の大域的構造に劇的な変化がおこるのかといったことである．

論文(2), (3)の結果をまとめておおざっぱに述べると次のようになる．

・解の大域的構造は，$\mu=1, 3$ で劇的な変化をおこす．

・解の大域的構造は $0<\mu<1,\ \mu=1, 1<\mu<3, \mu=3, 3<\mu$ それぞれで本質的に異なる．

・２次分岐がおこるのは $0<\mu<1$ の場合に限る．それは定数解 $u\equiv 0$ から１次分岐した，原点に関して点対称な非定数解が $d=\hat{d}(\mu)\in(0,4/\pi^2)$ において分岐を起こすものである．さらに，

$$\mu\downarrow 0 \text{ のとき } \hat{d}(\mu)\to 0\ , \qquad \mu\uparrow 1 \text{ のとき } \hat{d}(\mu)\to\frac{4}{\pi^2}.$$

・以上で述べた，すべての解はヤコビの楕円関数と完全楕円積分を用いて具体的に表示することができる．また，分岐点$\hat{d}(\mu)$の値も完全楕円積分からなる超越方程式を解くことにより具体的に求めることができる．

これらの結果をどのようにした得ることができたかの考え方を説明する．

方程式(1.1)を，$(\lambda,u(x))$を未知数とする，拘束条件束条件つきアレン－・カーン方程式

$$\begin{cases} -du_{xx}=(1-u^2)\big(u-\lambda\big), & x\in I, \\ u_x(\pm 1)=0, & \\ u_x(x)>0 & x\in I, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\lambda=\frac{\mu}{2}\int_{-1}^{1}udx. \tag{1.3}$$

に書き直す．(1.1) は (1.2)－(1.3) と同値である．

$d>0$，λ を既知として，(1.2)を満たすすべての $u(\lambda,d)$ を求め，そのなかで(1.3)を満たすものを選びだせば，(1.1) のすべての解がえられる．さらに，μ を固定したときの(1.1) の大域的解構造を知る問題は，(1.3)を

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1}u(\lambda,d)dx\lambda=\frac{1}{\mu} \tag{1.4}$$

と書き直して，(1.4)を満たす(λ,d)をすべて求める問題に帰着される．

これまでに我々は，(1.3)と本質的に同じ方程式に対して，すべての解をヤコビの楕円関数と完全楕円積分を用いて具体的に表示する方法を発見している．これを応用して，(1.3)のすべての解 $u(\lambda,d)$をヤコビの楕円関数と完全楕円積分を用いて具体的に表示することができる．このことから，(1.4)は幾何学的に解釈すると，曲面

$$\Psi(\lambda,d):=\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1}u(\lambda,d)dx \tag{1.5}$$

の高さ $1/\mu$ の等高線である．このようにして，方程式(1.1)の大域的解構造を調べる問題は，曲面 $\Psi(\lambda,d)$ とその等高線を調べる問題に帰着される．

では，曲面 $\Psi(\lambda,d)$はどのような形状をしているの，高さ $1/\mu$ の等高線はどのようになっているかについて見る．図 1～図 5 は，曲面 $\Psi(\lambda,d)$をさまざまな方向から見たものである．図 1，図 2 は鳥瞰図である．図 3 は正面図，図 4 は側面図である．図 5 は上方からみたものであり，図中にいろんな高さの等高線が一緒に描かれている．これらの等高線が，方程式(1.1)の大域的解構造を示しているのである．

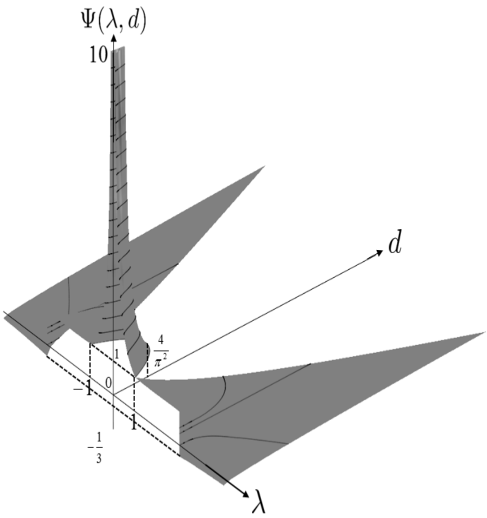
$\Psi(\lambda, d)$
10
d
$\frac{4}{\pi^2}$
1
0
-1
1
$-\frac{1}{3}$
λ

図 1

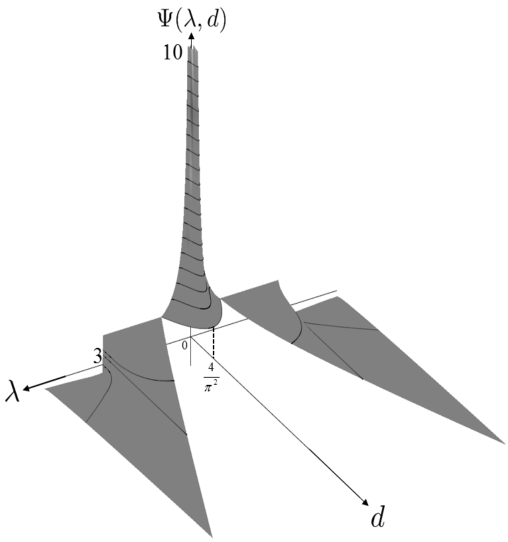
$\Psi(\lambda, d)$
10
3
0
$\frac{4}{\pi^2}$
λ
d

図 2

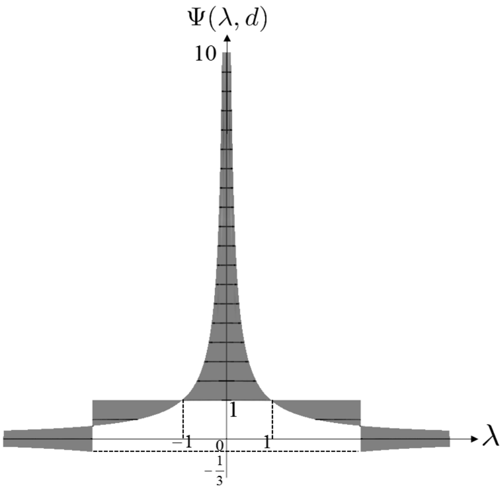
$\Psi(\lambda, d)$
10
1
-1
0
1
$-\frac{1}{3}$
λ

図 3

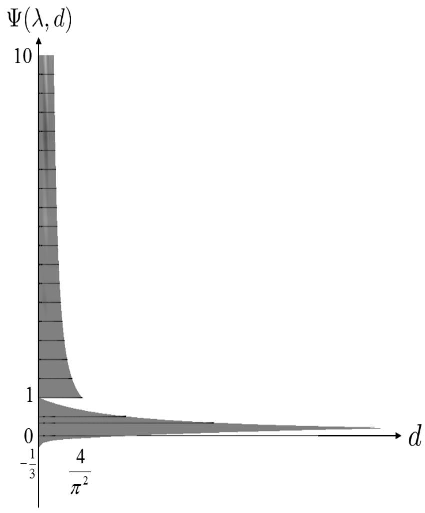
$\Psi(\lambda, d)$
10
1
0
$-\frac{1}{3}$
$\frac{4}{\pi^2}$
d

図 4

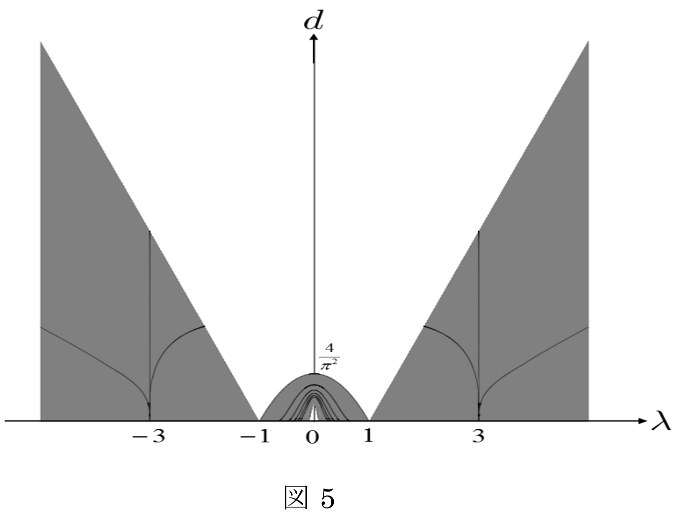
d
$\frac{4}{\pi^2}$
-3
-1
0
1
3
λ

図 5

３. 研究発表

(1) T. Mori, T. Suzuki and S. Yotsutani: Numerical approach to existence and stability of stationary solutions to the SKT cross-diffusion model, Math. Models Methods Appl. Sci., to appear (2018). (査読有)
(2) T. Mori, T. Suzuki and S. Yotsutani: Global solution branches for a nonlocal Allen -Cahn equation, Journal of Differential Equations, 264 (2018), 5928-5949. (査読有) doi/10.1016/j.jde.2018.01.025
(3) K. Kuto, T. Mori, T. Tsujikawa and S. Yotsutani: Secondary bifurcation for a nonlocal Allen–Cahn equation, Journal of Differential Equations, 263 (2017), 2687-2714. (査読有)　doi/ 10.1016/j.jde.2017.04.010
(4) J.-L. Chern, S. Yotsutani and N. Kawano: A Note on the Uniqueness and Structure of Solutions to the Dirichlet Problem for Some Elliptic Systems, Proceedings of Equadiff (2017), 283–286. (査読有) www.iam.fmph.uniba.sk/amuc/ojs/index.php/equadiff/article/view/814/575
(5) H. Matsubara, Y. Lou, W.-M. Ni, T. Mori and S.Yotsutani: Uniqueness proof of stationary solutions of a limiting SKT cross-diffusion equation, The 9th Taiwan -Japan Joint Workshop for Young Scholars in Applied Mathematics, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan, March 3-5, 2018. (招待講演)
(6) Yamakawa, S. Sukekuni, Y. Lou, W.-M. Ni, T. Mori and S.Yotsutani: Multiplicity of stationary solutions of a limiting SKT cross-diffusion equation, The 9th Taiwan -Japan Joint Workshop for Young Scholars in Applied Mathematics, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan, March 3-5, 2018. (招待講演)
(7) K.Kuto, T.Mori,T. Tsujikawa and S. Yotsutani: Secondary bifurcation for a nonlocal Allen-Cahn equation, Renmin Univ. of China Institute for Mathematical Sciences, Coll.0610, Peijing, China, June 6, 2017.（招待講演）
(8) K.Kuto, T.Mori,T. Tsujikawa and S. Yotsutani: Global structure of stationary solutions for a cell polarization model with conservation of mass, Renmin Univ. of China Institute for Mathematical Sciences, Coll.0610, Peijing, China. June 6, 2017（招待講演）
(9) E. Latos, T. Suzuki, and Y. Morita: Stability and spectral comparison of a reaction-diffusion system with mass conservation, J. Dynam. Differential Equations, to appear　(2018) (査読有)　 doi: 10.1007/s10884-018-9650-6
(10) Y. Morita and K. Sakamoto: A diffusion model for cell polarization with interactions on the membrane, Japan J. Indust. Appl. Math, 35 (2018), 261-276.（査読有）　doi: 10.1007/s13160-017-0290-8
(11) J.-L. Chern, Y. Morita, and T.-T. Shieh: Asymptotic behavior of equilibrium states of reaction-diffusion systems with mass conservation, Journal of Differential Equations, 264 (2018), 550-574. (査読有) doi: 10.1016/j.jde.2017.09.015
(12) S. Jimbo and Y. Morita: Nonlocal eigenvalue problems arising in a generalized phase-field-type system, 3. Japan J. Indust. Appl. Math., 34 (2018), 555-584.（査読有）　 doi: 10.1007/s13160-017-0254-z
(13)Y. Morita, Dynamical law of weakly interacting fronts in the FitzHugh -Nagumo system, International Workshop on Nonlinear Analysis and Reaction-Diffusion Equations. Jiangsu University, Zhenjiang, China, June 3-5, 2017. （招待講演）
(14) Y. Morita, Weakly interacting fronts and standing waves in the FitzHugh -Nagumo system, Equadiff 2017, Faculty of Civil Engineering of the Slovak University of Technology, Bratislava, Slovakia, July 24-28, 2017.（招待講演）
(15) Y. Morita, Localized patterns in a reaction-diffusion system with mass conservation, Equadiff 2017, Faculty of Civil Engineering of the Slovak University of Technology, Bratislava, Slovakia, July 24-28, 2017.（招待講演）

(16) T. Iwabuchi and T. Kawakami: Existence of mild solutions for a Hamilton-Jacobi equation with critical fractional viscosity in the Besov spaces, J. Math. Pures Appl. 107 (2017), 464-489. (査読有) doi:10.1016/j.matpur.2016.07.007
(17) K. Ishige, T. Kawakami and H. Michihisa: Asymptotic expansions of solutions of fractional diffusion equations, SIAM J. Math. Anal., J. Math. Pures Appl. 107 (2017), 464-489. (査読有) doi:10.1137/16M1101428
(18) M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami: An exterior nonlinear elliptic problem with a dynamical boundary condition, Rev. Mat. Complut., Rev. Mat. Complut. 30 (2017), 281-312. (査読有) doi:10.1007/s13163-017-0225-6
(19) A semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, Seminario di Analisi matematica, University of Bergamo, Dalmine, Italy, Nobember, 2017. (招待講演)
(20) T. Kawakami: Asymptotic expansion of solutions of fractional diffusion equations, Seminario di Analisi Nonlineare, University of Milano, Milano, Italy, Nobember, 2017. (招待講演)
(21) T. Kawakami: An exterior nonlinear elliptic problem wirh a dynamical boundary condition, Analysis and Partial Differential Equations Seminar, Johns Hopkins University, Baltimore, USA, Octorber, 2017. (招待講演)
(22) T. Kawakami: Decay estimates of the solutions for a nonlinear parabolic equation, Equadiff 2017, Slovak University of Technology in Bratislava, Slovakia, July, 2017. (招待講演)
(23) T. Kawakami: Asymptotic expansion of solutions of fractional diffusion equations, Singularity and asymptotic behavior of solutions for partial differential equations with conservation law,RIMS, Kyoto, June, 2017. (招待講演)
(24) K. Kitagawa, S. Nakaoka, Y. Asai, K. Watashi, S. Iwami : A PDE multiscale model of hepatitis C virus infection can be transformed to a system of ODEs, Journal of Theoretical Biology, 448 (2018), 80-85. (査読有) doi:10.1016/j.jtbi.2018.04.006
(25) M. Mahgoub, JI. Yasunaga JI, S.Iwami, S.Nakaoka, Y. Koizumi, K. Shimura, M. Matsuoka: Sporadic on/off switching of HTLV-1 Tax expression is crucial to maintain the whole population of virus-induced leukemic cells, Proc Natl Acad Sci U S A, 115 (2018), E1269-E1278. (査読有) doi: 10.1073/pnas.1715724115
(26) E. Yamada, S. Nakaoka, L. Klein, E. Reith, S. Langer, K. Hopfensperger, S. Iwami, G. Schreiber, F. Kirchhoff, Y. Koyanagi, D. Sauter, K. Sato, Human-Specific Adaptations in Vpu Conferring Anti-tetherin Activity Are Critical for Efficient Early HIV-1 Replication In Vivo, Cell Host Microbe, 23 (2018), 110-120. (査読有) doi: 10.1016/j.chom.2017.12.009.
(27) Y. Ito, A. Remion, A. Tauzin, K. Ejima, S. Nakaoka, Y. Iwasa, S. Iwami, F. Mammano, Number of infection events per cell during HIV-1 cell-free infection, Sci Rep, 7 (2017), 6559. (査読有) doi: 10.1038/s41598-017-03954-9
(28) H. Ohashi, Y. Koizumi, K. Fukano, T. Wakita, A.S. Perelson, S. Iwami, K. Watashi, Reply to Padmanabhan and Dixit: Hepatitis C virus entry inhibitors for optimally boosting direct-acting antiviral-based treatments, Proc Natl Acad Sci U S A, 114 (2017), E4527-E4529. (査読有) doi: 10.1073/pnas.1705234114
(29) Y. Nakano,N. Misawa N, G,-Fernandez, M. Moriwaki, S. Nakaoka, T. Funo, E. Yamada, A. Soper, R. Yoshikawa, D. Ebrahimi, Y. Tachiki, S. Iwami, R.S.,Harris, Y. Koyanagi, K. Sato: HIV-1 competition experiments in humanized mice show that APOBEC3H imposes selective pressure and promotes virus adaptation, PLoS Pathog, 13 (2017), e100634. (査読有) doi: 10.1371/journal.ppat.1006348.
(30) S. Iwanami, Y. Kakizoe, S. Morita, T. Miura, S. Iwami: A highly pathogenic simian/human immunodeficiency virus effectively produces infectious virions compared with a less pathogenic virus in cell culture, Theor Biol Med Model, 14 (2017), 9. (査読有) doi: 10.1186/s12976-017-0055-8
(31) K. Fujiu, M. Shibata, Y. Nakayama, F. Ogata, S. Matsumoto, K. Noshita, S. Iwami, S. Nakae, I. Komuro, R. Nagai, I. Manabe, A heart-brain-kidney network controls

adaptation to cardiac stress through tissue macrophage activation, Nat Med, 23 (2017), 611-622. （査読有） doi: 10.1038/nm.432
(32) X. He, W.-M. Ni: Global dynamics of the Lotka-Volterra competition-diffusion system with equal amount of total resources, III. Calc. Var. Partial Differential Equations 56 (2017), 132-157. （査読有） doi: 10.1007/s00526-017-1234-5
(33) F. Li, K. Nakashima, W.-M. Ni: Non-local effects in an integro-PDE model from population genetics. European J. Appl. Math. 28 (2017), 1-41. （査読有） doi: 10.1017/S0956792515000601
(34) S Chen, Y Lou, J Wei: Hopf bifurcation in a delayed reaction-diffusion-advection population model, S. Chen, Y. Lou, J. Wei, Journal of Differential Equations, 2 (2018), 5333-5359. （査読有） doi: 10.1016/j.jde.2018.01.008
(35) S Chen, Y Lou, J Wei: Hopf bifurcation in a delayed reaction-diffusion-advection population model, Journal of Differential Equations, 2 (2018), 5333-5359. (査読有) doi: 10.1016/j.jde.2018.01.008
(36) R Cui, KY Lam, Y Lou, Dynamics and asymptotic profiles of steady states of an epidemic model in advective environments, Journal of Differential Equations, 263 (2017), 2343-2373. （査読有） doi: 10.1016/j.jde.2017.03.045
(37) Y Lou, Y Tao, M Winkler: Nonexistence of nonconstant steady-state solutions in a triangular cross-diffusion model, Journal of Differential Equations 262 (2017), 5160-5178. (査読有） doi: 10.1016/j.jde.2017.01.017

４. 本研究課題のキーワード

（１） localized pattern　（２） cross-diffusion　（３） reaction diffusion equation
（４） nonlocal effect　（５） bifurcation　（６） exact solution
（７） elliptic function　（８） elliptic integral